**02.05.2020**

**Тема:** Функции и их графики.

Выполнить конспект

**План занятия:**

1. Понятие функции

2. Понятие графика функции

3. Основные свойства функций.

**Вопрос 1.** Понятие функции

Функция - зависимость переменной **у** от переменной **x**, если каждому значению **х** соответствует единственное значение **у**. Переменную **х** называют независимой переменной или аргументом. Переменную **у** называют зависимой переменной. Все значения независимой переменной (переменной **x**) образуют область определения функции. Все значения, которые принимает зависимая переменная (переменная **y**), образуют область значений функции.

**Вопрос 2.** Понятие графика функции

**Графиком функции** называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты - соответствующим значениям функции, тоесть по оси абсцисс откладываются значения переменной **x**, а по оси ординат откладываются значения переменной **y**.

**Вопрос 3.** Основные свойства функций.

**1) Область определения функции и область значений функции**.

Область определения функции - это множество всех допустимых действительных значений аргумента **x** (переменной **x**), при которых функция **y = f(x)** определена. Область значений функции - это множество всех действительных значений **y**, которые принимает функция.

В элементарной математике изучаются функции только на множестве действительных чисел.

**2) Нули функции**.

Нуль функции – такое значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.

**3) Промежутки знакопостоянства функции**.

Промежутки знакопостоянства функции – такие множества значений аргумента, на которых значения функции только положительны или только отрицательны.

**4) Монотонность функции**.

Возрастающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

Убывающая функция (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

**5) Четность (нечетность) функции**.

Четная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого **х** из области определения выполняется равенство **f(-x) = f(x)**. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Нечетная функция - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого **х** из области определения справедливо равенство **f(-x) = - f(x**). График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

**6) Ограниченная и неограниченная функции**.

Функция называется ограниченной, если существует такое положительное число M, что |f(x)| ≤ M для всех значений x . Если такого числа не существует, то функция - неограниченная.

**7) Периодичность функции**.

Функция f(x) - периодическая, если существует такое отличное от нуля число T, что для любого x из области определения функции имеет место: f(x+T) = f(x). Такое наименьшее число называется периодом функции. Все тригонометрические функции являются периодическими.

*Вопросы для самоконтроля*

1. Дать определение функции.
2. Дать определение графика функции.
3. Перечислить свойства функции

**04.05.2020**

**Урок на тему: "Построение графиков функций. Алгоритм построения и примеры"**

Что же такое график функции?

**График функции** – это множество точек, абсциссы которых являются значениями из области определения, а ординаты - значениями функции y= f(x). График любой функций строят по точкам. Но если мы точно не знаем, какой будет вид у графика, то точки надо выбирать обдуманно. Ребята, какие важные точки есть у функций?

Давайте, вспомним их:

а) **Стационарные и критические точки**. Такие точки мы научились находить при вычислении экстремумов функций. Это точки, в которой производная либо равна нулю, либо не существует.  
б) **Точки экстремума**. Точки максимума и минимума функций. Точки, возле которых определяется характер монотонности.  
в) **Точки пересечения графика с осью абсцисс и осью ординат**. Значения, в которых функция y= f(x)= 0 – точки пересечения с осью абсцисс. А если вычислить f(0) – то эта точка пересечения с осью ординат.  
г) **Точки разрыва функций**. Эти точки ищутся для не непрерывных функций.

Правило построения графиков функций

**Ребята, давайте запишем основные правила построения графиков функций:**

* Если функция y= f(x) непрерывна на всей числовой прямой, то надо найти стационарные и критические точки, точки экстремума, промежутки монотонности, точки пересечения графика с осями координат и при необходимости выбрать еще несколько контрольных точек, в которых следует подсчитать значение нашей функции.
* Если функция y= f(x) определена не на всей числовой прямой, то начинать следует с нахождения области определения функции, с указания точек ее разрыва.
* Полезно исследовать функцию на чётность, поскольку графики четной или нечетной функций обладают симметрией (соответственно относительно оси y или относительно начала координат), и, следовательно, можно сначала построить только ветвь графика при x ≥ 0, а затем дорисовать симметричную ветвь.
* ЕслиГрафик функциито прямая y= b является горизонтальной асимптотой нашего графика функции. Асимптота - это некоторой ориентир для нашей функции. Это то, к чему стремится график функции в точке, но не достигает этого значения.
* Если f(x)=p(x)q(x)p(x)q(x); и при x= a знаменатель обращается в нуль, а числитель отличен от нуля, то x= a - это вертикальная асимптота.

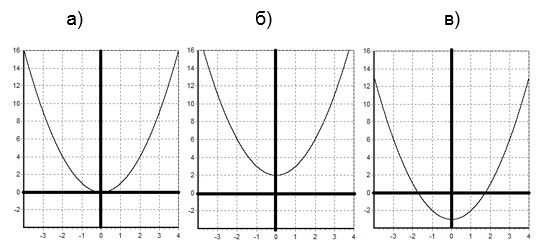
**Несколько правил, упрощающих построение графиков функций:**

а) График функции y= f(x) + a получается из графика функции y= f(x) (график y= f(x) заранее известен), путем параллельного переноса графика y= f(x) на а единиц вверх, если а > 0; и на а единиц вниз, если а < 0.

Для примера построим три графика: а) y= x2, б) y= x2 + 2, в) y= x2 - 3.

Графики наших функций получается из графика функции y=x2, путем его параллельного переноса: б) на две единицы вверх, в) на три единицы вниз.

Графики наших функций:

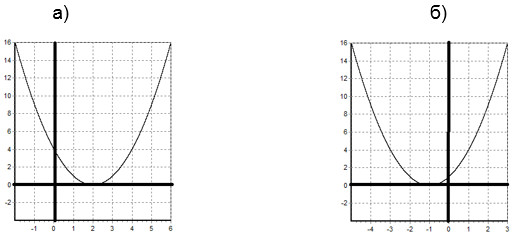


б) График функции y= f(x + a) получается из графика функции y= f(x) (график y= f(x) заранее известен). Используем параллельный перенос графика y= f(x) на а единиц влево, если а > 0, и на а единиц вправо, если а < 0.

Для примера построим три графика: а) y= (x - 2)2, б) y= (x + 1)2.

Графики наших функций получается из графика функции y= x2, путем его параллельного переноса: б) на две единицы вправо, в) на одну единицу влево.

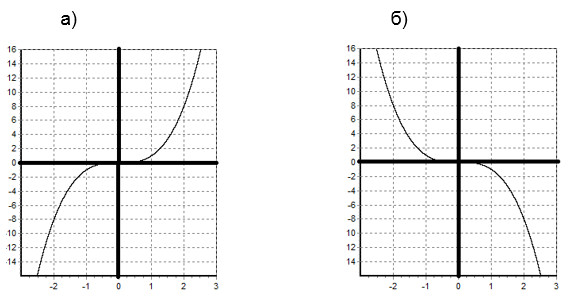
Графики наших функций:



в) Для построения графика функции y= f(-x), следует построить график функции y= f(x) и отразить его относительно оси ординат. Полученный график является графиком функции y= f(-x).

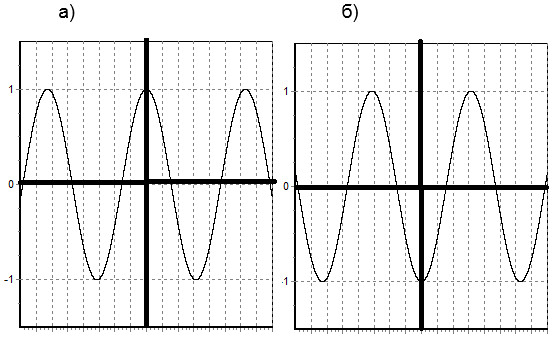
Для примера построим два графика: a) y= x3, б) y= (-x)3.

Графики нашей функций получается из графика функции y=x3, путем отражения относительно оси ординат.



г) Для построения графика функции y= -f(x) следует построить график функции y=f(x) и отразить его относительно оси абсцисс.

Для примера построим два графика: a) y= cos(x), б) y=-cos(x). Графики нашей функций получается из графика функции y= cos(x), путем отражения относительно оси абсцисс.

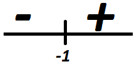


Ребята, теперь давайте построим графики функций, вид которых заранее не известен. Будем использовать правила, которые мы определили в начале.

Примеры на построение

I. Построить график функции: y= 2x2 + 4x - 5.

Решение:  
1) Область определения: D(y)= (-∞; +∞).  
2) Найдем стационарные точки:  
y'= 4x + 4,  
4x + 4 = 0,  
x= -1.  
3) Определим вид стационарной точки и характер монотонности:

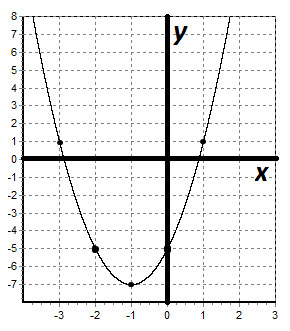


Точка x= -1 – точка минимума. Найдем значение функции в точке x= -1  
y(-1)= 2(-1)2 + 4(-1) - 5= -7.  
Итак, наша функция убывает на промежутке =(-∞;-1), x= -1 – точка минимума, функция возрастает на промежутке (-1; +∞).

Вычислим значения функции в паре точек:

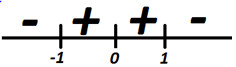
Функции

Построим график функции:



II. Построить график функции: y= 5x3 - 3x5.

Решение:  
1) Область определения: D(y)= (-∞;+∞).  
2) Найдем стационарные точки:  
y'= 15x2 - 15x4,  
y'= 15x2(1 - x2)= 15x2(1 - x)(1 + x),  
15x2(1 - x)(1 + x)= 0,  
x= 0; ±1.  
3) Определим вид стационарной точки и характер монотонности:



Точка x= -1 – точка минимума.  
Точка x= 0 – точка перегиба, функция в этой точки так же возрастает, но вогнутость меняется в другую сторону.  
Точка x= 1 – точка максимума.

Найдем значение функции в точке x= -1: y(-1)= 5(-1)3 - 3(-1)5= -2.  
Найдем значение функции в точке x= 0: y(0)= 5(0)3 - 3(0)5= 0.  
Найдем значение функции в точке x= 1: y(1)= 5(1)3 - 3 (1)5= 2

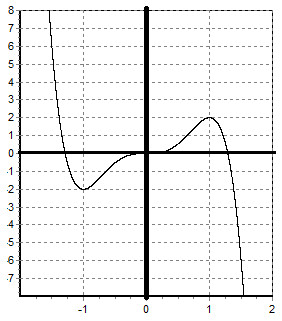
5) Исследуем функцию на четность: y(-x)= 5(-x3) - 3(-x5)= -5x3 + 35= -y(x)  
По определению функция нечетная, и график симметричен относительно начало координат.

Итак, функция нечетная.  
Наша функция убывает на промежутке равном (-∞;-1).  
x= -1 – точка минимума. Функция возрастает на (-1;1).  
x= 0 – точка перегиба.  
x= 1 – точка максимума. Функция возрастает на (1;+∞).

Вычислим значения функции в паре точек:

Функции

Построим график функции:

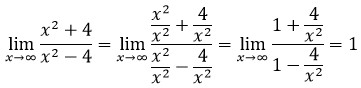


III. Построить график функции: y=x2+4x2−4x2+4x2−4.

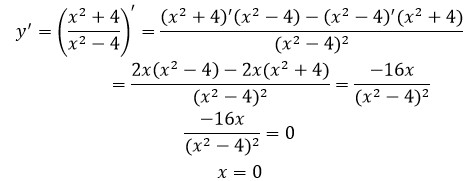
Решение:  
1) Область определения: D(y)= (-∞;-2)U(-2;2)U(2;+∞).  
  
2) Исследуем функцию на четность: y(-x)= (−x)2+4(−x)2−4=x2+4x2−4(−x)2+4(−x)2−4=x2+4x2−4= y(x)

По определению функция четная. Значит, график функции симметричен относительно оси ординат, можно сначала построить график функции для x ≥ 0. 3) Прямая x= 2 – вертикальная асимптота, т.к. знаменатель нашей функции в этой точке обращается в нуль.

Найдем горизонтальную асимптоту:



Прямая y= 1 – горизонтальная асимптота.

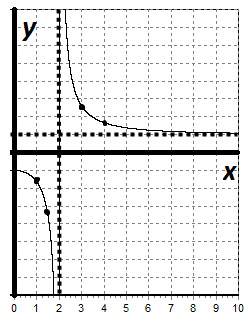
4) Найдем стационарные и критические точки:Критических точек у нашей функции нет, т.к. производная определена всюду на области определения нашей функции.  
5) Определим вид стационарной точки и характер монотонности:График функцииТочка x= 0 – точка максимума.

Итак, наша функция четная. Она возрастает на промежутке равном (-∞;0), x= 0 – точка максимума. Функция убывает на (0;+∞).  
Прямая x= 2 – вертикальная асимптота. Прямая y= 1 – горизонтальная асимптота.

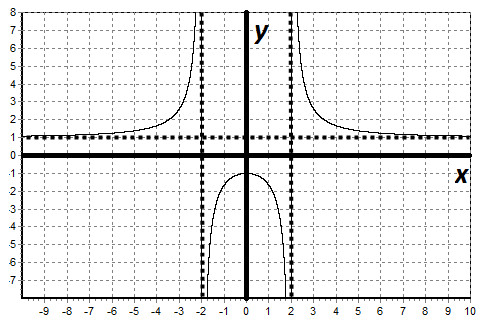
Вычислим значения функции в паре точек:

График функции

Т.к. функция четная построим сначала график для x ≥ 0.



Используя свойство четных функций, отразим график функции относительно оси ординат.



Задачи на построение графиков функций для самостоятельного решения

1) Построить график функции: y=(−x)2+4x−7.  
2) Построить график функции: y=x3−3x+2.  
3) Построить график функции: y=(2x+1)(x2+2).